Licence 3 : sémantique compositionnelle
Mardi 8 mars 2016
Devoir sur table - durée 1h

Exercice 1 (4 points)
Soit le modèle suivant
D ={a,b,c,d}
A = {(a,a),(a,b),(c,b)}

Dire si la formule qui suit est vraie ou fausse dans ce modèle.
(i) $\forall x \forall y\ (A(x,y) \rightarrow \exists z\ ((z \neq x) \wedge (z \neq y) \wedge (A(x,z) \vee A(y,z))))$
La formule est fausse dans le modèle. En effet, on peut vérifier que dans ce modèle A(c,b) est vrai et pourtant il n'existe aucun z tel que A(c,z) ou A(b,z) soit vrai.

Si elle est vraie, changer le modèle de façon à la rendre fausse.
Si elle est fausse, changer le modèle de façon à la rendre vraie.
(i) est fausse dans le modèle ci-dessus, il faut donc changer ce modèle pour rendre la formule (i) vraie. Il y a une infinité de possibilités. L'une consiste à garder le même domaine, mais à changer l'interprétation.
On peut ajouter dans l'interprétation de A le couple (b,a). Du coup (c,b) ne constitue plus un contre-exemple à (i).
Il faut alors vérifier que (i) s'applique aussi au couple (b,a) : puisque A(b,a), on doit trouver un z différent de b et de a tel que A(b,z) ou A(a,z). Ce n'est pas le cas.
On peut donc ajouter A(b,c) ou A(b,d) ou A(a,c) ou A(a,d). Mais là encore, il faudra que cet ajout ne constitue pas un contre-exemple à (i). On voit que si on ajoute A(b,c), cela ne contrevient pas à la formule (i), car (b,a) est déjà dans A.
Donc on propose le modèle suivant qui vérifie (i) :
D ={a,b,c,d}   A = {(a,a),(a,b),(c,b), (b,a), (b,c)}

Exercice 2 (8 points)
Soit la phrase suivante :
(ii) *Jean donne à Pierre ce qu'il veut.*
Prouver que cette phrase est ambiguë en utilisant le calcul des prédicats et la théorie des modèles.

Il y a une ambiguïté qui vient de l'interprétation du pronom « il », qui peut référer soit à Jean, soit à Pierre. On a donc les deux interprétations suivantes, Int1 et Int2 :
Int1 : Jean donne à Pierre ce que lui-même, Jean, veut.
Int2 : Jean donne à Pierre ce que ce dernier, Pierre, veut.

Il y a une autre question qui se pose. Est-ce que « ce qu'il veut » signifie « tout ce qu'il veut » ou « une chose qu'il veut » ? Il me semble que l'interprétation universelle est la plus naturelle. (Mais on pourrait aussi penser que « ce qu'il veut » est un GN défini spécifique correspondant à « la chose qu'il veut ». Cela dit, un GN défini ne correspond pas à une expression quantifiée existentiellement dans le calcul des prédicats.)

Les deux formules du calcul des prédicats correspondant à ces deux interprétations sont les suivantes, où j et p sont deux constantes d'individus, et D(x,y,z) et V(x,y) deux constantes de prédicats
F1 : $\forall x\ (V(j,x) \rightarrow D(j, x, p))$
F2 : $\forall x\ (V(p,x) \rightarrow D(j, x, p))$

On peut montrer que ces deux formules ne sont pas équivalentes. En effet si on considère le modèle $\mathcal{M}$ ci-dessous, on a $\mathcal{M}$ vérifie F2 et $\mathcal{M}$ ne vérifie pas F1.

$\mathcal{M}$: <{PIERRE, JEAN, CHOSE1, CHOSE 2}, $\mathcal{I}$>

$\mathcal{I}$ (V) = {(JEAN, CHOSE1), (JEAN, CHOSE2), (PIERRE, CHOSE1)}

$\mathcal{I}$ (D) = {(JEAN, CHOSE1, PIERRE)}

Or deux formules sont équivalentes si et seulement si elles sont vraies exactement dans les même modèles.
Donc (ii) est bien ambiguë.

Exercice 3 (8 points)
Soit la phrase suivante :
(iii) *Il n'y a pas de mot de passe que personne ne puisse deviner.*

et les formules de la logique des prédicats où avec MdP(x) signifie 'x est un mot de passe', H(x) 'x est humain' et PD(x,y) 'x peut deviner y'.
(1) $\neg\exists x\ (MdP(x) \wedge \neg\exists y\ (H(y) \rightarrow PD(y,x))$
(2) $\neg\exists x\ (MdP(x) \wedge \neg\exists y\ (H(y) \wedge PD(y,x))$
(3) $\forall x\ \neg\exists y\ (MdP(x) \wedge H(y) \wedge PD(y,x))$
(4) $\forall x\ \forall y\ (MdP(x) \rightarrow (H(y) \rightarrow \neg PD(y,x)))$

Parmi ces formules :

a) laquelle ou lesquelles représente(nt) bien le sens de la phrase ?
b) pour les formules qui ne conviennent pas, expliquer le problème et dire, si c'est possible, à quelle phrase de la langue elles correspondent.

La seule formule qui traduit correctement (iii) est (2).
- En (1), le problème vient de l'implication qui suit la quantification existentielle sur y.
Prenons un modèle dans lequel il n'y a pas d'homme.
S'il n'y a pas d'homme,

$\exists y\ (H(y) \rightarrow \ldots.)$ est vrai, donc
$\neg\exists y\ (H(y) \rightarrow \ldots)$ est faux, donc
$\exists x\ (MdP(x) \wedge \neg\exists y\ (H(y) \rightarrow PD(y,x))$ est faux et donc
$\neg\exists x\ (MdP(x) \wedge \neg\exists y\ (H(y) \rightarrow PD(y,x))$ est vrai.

La formule (i) est donc vraie, et pourtant, (iii), qui signifie qu'il y a toujours quelqu'un qui peut découvrir n'importe quel mot de passe, semble fausse.
Donc cette formule ne correspond pas à la phrase.

- En (3), la formule ne convient pas car elle asserte que tout est mot de passe, qu'il n'y a que des mots de passe. Or ce n'est pas ce que dit (iii).

$\forall x\ \neg\exists y\ (MdP(x) \wedge H(y) \wedge PD(y,x))$ est équivalent à
$\forall x\ (MdP(x) \wedge \neg\exists y\ (H(y) \wedge PD(y,x)))$.

Une traduction en langue naturelle serait : Il n'y a que des mots de passe et personne ne peut les découvrir.

- En (4), la formule ne convient pas car elle asserte que les mots de passe, les hommes, ils ne peuvent pas les découvrir. Ou en d'autres termes qu'aucun homme ne peut découvrir le moindre mot de passe.

Licence 3 : sémantique compositionnelle
Vendredi 10 mars 2017
Devoir sur table - durée 1h30

Exercice 1 (10 points)

Soit le modèle $\mathcal{M}$ défini sur le domaine D ={ANDRE, BEA, CHLOE, DENIS} et dont la fonction d'interprétation $\mathcal{I}$ est la suivante :

$\mathcal{I}$(a) = ANDRE, $\mathcal{I}$(b) = BEA, $\mathcal{I}$(c) = CHLOE, $\mathcal{I}$(d) = DENIS,

$\mathcal{I}$ (A) = {(ANDRE, ANDRE), (ANDRE, BEA), (CHLOE, BEA)}

$\mathcal{I}$ (E) = { BEA, CHLOE)}

$\mathcal{I}$ (P) = { DENIS, ANDRE}

1. Dire si les formules qui suivent sont vraies ou fausses dans ce modèle.

(i) $\forall x(E(x) \rightarrow \exists y\ (E(y) \wedge A(x,y)))$

La formule est fausse dans le modèle. Car il n'a pas de y tq A(BEA,y)

(ii) $\exists x \exists y\ (P(x) \wedge \neg A(x,y))$

La formule est vraie car Denis n'aime personne, donc par exemple ¬A(DENIS,CHLOE)

(iii) $\exists x\ (E(x) \wedge \forall y\ (P(y) \rightarrow (\neg A(x,y) \wedge \neg A(y,x)))\ )$

La formule est vraie car Chloe n'aime aucun prof et n'est aimée d'aucun prof.

2. Associer aux prédicats A, P et E une expression de la langue naturelle et dire à quelle phrase de la langue naturelle correspond la formule (iii).

Si A (x,y) signifie x aime y, E(x), x est étudiant et P(x) x est professeur, on peut associer à (iii) : il y a un étudiant qui n'aime aucun professeur et qu'aucun professeur n'aime.

3. Changer le modèle $\mathcal{M}$ de façon à rendre la formule (iii) fausse si elle est vraie, et vraie si elle est fausse.

(iii) est vraie dans $\mathcal{M}$. Pour la rendre fausse, il suffit d'ajouter à l'interprétation de A (CHLOE, DENIS) par exemple. Mais il y a beaucoup d'autres solutions possibles.

Exercice 2 (10 points)

Soit les phrases suivantes :

(1) Tout le monde n'a pas pu discuter avec tout le monde.

(2) Il y a quelqu'un qui n'a pas pu discuter avec qui que ce soit.

1. Traduire ces deux phrases dans le calcul des prédicats.

Vocabulaire :

H(x) : x est un homme.

D(x,y) : x a pu discuté avec y

(1) $\neg \forall x(H(x) \rightarrow \forall y(H(y) \rightarrow D(x,y)))$ ou encore $\exists x \exists y\ (H(x) \wedge H(y) \wedge \neg D(x,y))$

(2) $\exists x(H(x) \wedge \forall y(H(y) \rightarrow \neg D(x,y)))$

2. Trouver un modèle qui vérifie à la fois (1) et (2).

Soit le modèle $\mathcal{M}$ défini sur le domaine D ={ANDRE, BEA, CHLOE} et dont la fonction d'interprétation $\mathcal{I}$ est la suivante :

$\mathcal{I}$(a) = ANDRE, $\mathcal{I}$(b) = BEA, $\mathcal{I}$(c) = CHLOE

$\mathcal{I}$ (D) = {(ANDRE, BEA), (ANDRE, CHLOE), (CHLOE, ANDRE), (CHLOE, BEA)}

Ce modèle vérifie (1) car Bea n'a pas pu discuter avec André.
Ce modèle vérifie (2) car Bea n'a pas pu discuter ni avec André, ni avec Chloe.

3. Trouver un modèle qui falsifie à la fois (1) et (2).

Soit le modèle $\mathcal{M}$ défini sur le domaine D ={ANDRE, BEA, CHLOE} et dont la fonction d'interprétation $\mathcal{I}$ est la suivante :

$\mathcal{I}$(a) = ANDRE, $\mathcal{I}$(b) = BEA, $\mathcal{I}$(c) = CHLOE

$\mathcal{I}$ (D) = {(ANDRE, BEA), (ANDRE, CHLOE), (BEA, ANDRE), (BEA, CHLOE), (CHLOE, ANDRE), (CHLOE, BEA)}

Ce modèle falsifie (1) car tout le monde a discuté avec tout le monde.
Ce modèle falsifie (2) car à la fois Bea, andré et Chloe ont pu discuter avec quelqu'un.

4. Trouver un modèle qui permette de dire si ces deux phrases sont équivalentes ou non.

Il faut un modèle qui vérifie (1) mais pas (2). Cela prouvera que les formules ne sont pas équivalentes. Soit $\mathcal{M}$' défini sur le domaine D ={ANDRE, BEA, CHLOE} et dont la fonction d'interprétation $\mathcal{I}$ est la suivante :

$\mathcal{I}$(a) = ANDRE, $\mathcal{I}$(b) = BEA, $\mathcal{I}$(c) = CHLOE

$\mathcal{I}$ (D) = {(ANDRE, CHLOE), (BEA, CHLOE), (CHLOE, ANDRE), (CHLOE, BEA)}

Ce modèle vérifie (1) car André et Bea n'ont pas discuté ensemble.
Ce modèle falsifie (2) car à la fois André, tout comme Bea et Chloe ont pu discuter avec au moins une personne.

Licence 3 : sémantique compositionnelle
Mardi 27 février 2018
Devoir sur table - durée 1h30

Exercice 1 (10 points)
Soit la phrase suivante :
(1) *Tout le monde ne connaît pas quelqu'un avec qui parler de tout.*

1. Pour chacune des formules ci–dessous, dire si elle la représente bien ou non dans le calcul des prédicats, sachant qu'on pose le vocabulaire suivant :

H(x) : x est humain
C(x,y) : x connaît y
P(x,y,z) : x parle à y de z

(i) $\neg\forall x\ (H(x) \rightarrow \exists y\ (H(y) \wedge C(x,y) \wedge \forall z\ P(x,y,z)))$
(ii) $\forall x\ (H(x) \rightarrow \forall z\ \neg\exists y\ (H(y) \wedge C(x,y) \wedge P(x,y,z)))$
(iii) $\forall x\ (H(x) \rightarrow \exists y\ \forall z\ (H(y) \wedge C(x,y) \wedge \neg P(x,y,z)))$
(iv) $\forall x\ (H(x) \rightarrow \exists y\ (H(y) \wedge \neg C(x,y) \wedge \forall z\ P(x,y,z)))$
(v) $\forall x\ (H(x) \rightarrow \neg\forall z\ \exists y\ (H(y) \wedge C(x,y) \wedge P(x,y,z)))$

2. Pour les formules qui ne conviennent pas, expliquer où se situe le problème et préciser quelle phrase de la langue naturelle elles représentent.

Correction sans justifications
(i) OK
(ii) Non, autre sens. Tout le monde ne connaît personne à qui parler de quoi que ce soit.
(iii) Non, autre sens. Tout le monde connaît quelqu'un à qui il ne parle de rien.
(iv) Non, autre sens. Pour tout le monde, il y a quelqu'un qu'il ne connaît pas et à qui il parle de tout.
(v) Non. Autre sens. Pour tout le monde, il y a au moins une chose dont il ne parle avec personne qu'il connaît.

Exercice 2 (10 points)
Soit les phrases suivantes :
(2) *Jean et Marie se fâcheront si quelqu'un leur révèle la vérité.*

1. Traduire cette phrase dans le calcul des prédicats. Si elle est ambiguë, donner une représentation correspondant à chaque interprétation. On n'analysera pas le groupe nominal « la vérité », mais on utilisera le prédicat R(x,y) pour 'x révèle la vérité à y'.

2. Choisir une des interprétations de la phrase et imaginer un modèle qui la vérifie et un modèle qui la falsifie.

3. Si la phrase est ambiguë, choisir deux formules correspondant à deux interprétations distinctes et montrer, en s'appuyant sur des modèles, que ces deux formules ne sont pas équivalentes.

Indications de correction
(2) est comporte plusieurs ambiguïtés :
- Jean et Marie peuvent se fâcher l'un avec l'autre, ou chacun avec quelqu'un d'autre.
- La personne par qui la vérité est révélée peut être la même pour Jean et Marie, ou pas.