COURS 3
Sémantique compositionnelle. Sémantique du calcul des prédicats (2) : interprétation dans un modèle des variables et des quantificateurs.

Un modèle $\mathcal{M}$, c'est une paire <D,$\mathcal{I}$> où
- D est un ensemble non vide d'entités appelé domaine d'interprétation
- $\mathcal{I}$ est une fonction, appelée fonction d'interprétation, qui projette les constantes d'individus dans D et chaque prédicat n-aire dans D^n.

1) EVALUATION D'UNE FORMULE DNAS UN MODELE
1.1 Formule non quantifiée
1.2 Formule quantifiée
Deux méthodes :
(i) la méthode des substitutions,
(ii) la méthode des assignations. (On laisse (ii) de côté, bien que ce soit la seule méthode applicable lorsque certains individus du domaine ne sont associés pas à une constante).

• La méthode des substitutions
Méthode applicable seulement si à chaque individu du domaine est associée au moins une constante du langage logique.
Substitution :
Soit F une formule, x une variable et c une constante. On note [c/x]F le résultat de la substitution de toutes les occurrences libres de x dans F par c.

Définition. Dénotation d'une formule dans un modèle $\mathcal{M}$ par induction sur les formules
- Si P est un prédicat n-aire et a1,…, a_n sont des constantes d'individu, alors $[[P(a_1, \ ,a_n)]]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $(\mathcal{I}(a_1),\dots,\mathcal{I}(a_n)) \in \mathcal{I}(P)$. Sinon, $[[P(a_1, \ ,a_n)]]^{\mathcal{M}} = 0$.
- Si F est une formule, alors $[[\neg F]]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[[F]]^{\mathcal{M}} = 0$
- Si F et G sont deux formules, $[[F \wedge G]]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[[F]]^{\mathcal{M}} = 1$ et $[[G]]^{\mathcal{M}} = 1$
- Si F et G sont deux formules, $[[F \vee G]]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[[F]]^{\mathcal{M}} = 1$ ou $[[G]]^{\mathcal{M}} = 1$
- Si F et G sont deux formules, $[[F \rightarrow G]]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[[F]]^{\mathcal{M}} = 0$ ou $[[G]]^{\mathcal{M}} = 1$
- Si F est une formule, $[[\exists x\ F]]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi il existe au moins une constante c telle que $[[(c/x)\ F]]^{\mathcal{M}} = 1$
- Si F est une formule, $[[\forall x\ F]]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi pour toutes les constantes c du langage $[[(c/x)\ F]]^{\mathcal{M}} = 1$

Exercice 1
Dans les formules suivantes, préciser quelles sont, s'il y en a, les occurrences libres et les occurrences liées des variables x et y.
a) $\exists x\ A(x) \wedge B(y)$
b) $\exists x\ \exists y\ (A(x) \wedge B(y))$
c) $\exists x\ A(x) \wedge \exists y\ B(y)$
d) $\forall x\ (B(x) \vee \exists y\ R(x,y))$
e) $\forall x\ B(x) \vee \exists y\ R(x,y)$
f) $\forall x\ (B(x) \vee \exists x\ R(x,x))$
g) $\forall x\ \exists y\ R(x,y) \wedge \exists x\ B(x)$
h) $\exists y\ R(x,y) \wedge \exists x\ B(x)$

Exercice 2
Soit les prédicats unaires A, B, C, et les formules :
a) $\exists x\ (A(x) \wedge B(x))$
b) $\forall x\ (\neg B(x) \rightarrow A(x))$
i) Trouver un modèle qui vérifie simultanément les formules a et b.
ii) Trouver un modèle qui falsifie la formule b.

2) EQUIVALENCE ET AMBIGUÏTE

- Deux formules sont équivalentes ssi elles sont vraies exactement dans les mêmes modèles.
- Une phrase est ambiguë quand on peut lui associer deux représentations/formules qui ne sont pas équivalentes.

Pour montrer que deux formules ne sont pas équivalentes, il suffit de trouver un modèle qui vérifie l'une d'elle et falsifie l'autre.

- Si on trouve un modèle qui vérifie les deux formules, cela ne prouve rien.
- Si on trouve un modèle qui falsifie les deux formules, cela ne prouve rien.

Exercice 3. Les phrases suivantes sont-elles ambiguës ? Si oui, le montrer en formalisant chaque interprétation et en montrant que ces interprétations ne sont pas équivalentes.

(1) Jean et Marie aime une femme.

(2) Un tuteur a pris en charge tous les étudiants.

Exercice 4 (donné en CC)

Soit le modèle $\mathcal{M}$, défini sur le domaine D={ANDRE, BENOIT, CLAUDE, DENIS, EDOUARD} et dont la fonction d'interprétation $\mathcal{I}$ est la suivante :

$\mathcal{I}$(a) = ANDRE, $\mathcal{I}$(b) = BENOIT, $\mathcal{I}$(c) = CLAUDE, $\mathcal{I}$(d) = DENIS, $\mathcal{I}$(e) = EDOUARD

$\mathcal{I}$(H) = {ANDRE, BENOIT, DENIS, EDOUARD}

$\mathcal{I}$(A) = {(CLAUDE, ANDRE), (BENOIT, DENIS), (DENIS, EDOUARD), (ANDRE, EDOUARD})

a. Quelle est, dans ce modèle, la dénotation des expressions suivantes, sachant qu'on considère que A traduit le verbe *aimer* et H le nom *homme.*

1. *Le seul homme que personne n'aime.*
2. *André n'aime pas Claude.*
3. *Personne n'aime Claude.*
4. *Tout le monde aime quelqu'un.*

b. Est-ce que la formule suivante est vraie dans $\mathcal{M}$?

5. $\forall x\ \forall y\ (\ (H(x) \wedge H(y)) \rightarrow \neg(A(x,y) \wedge A(y,x))\ )$

c. Si la formule 5 est vraie, changer le modèle de façon à la rendre fausse. Si elle est fausse, changer le modèle de façon à la rendre vraie.

Exercice 5 (donné en CC)

Soit la phrase suivante :

6. *Tout le monde a vu quelqu'un dehors.*

Montrer que cette phrase est ambiguë en utilisant le calcul des prédicats et la théorie des modèles.

Exercice 6 (donné en CC)

Considérer la phrase suivante :

7. *Aucun candidat n'a pu finir tous les exercices.*

et les formules de la logique des prédicats où avec C(x) signifie 'x est un candidat', E(x) 'x est un exercice' et F(x,y) 'x a pu finir y'.

(1) $\exists x\ (E(x) \wedge \forall y\ (C(y) \rightarrow \neg F(y,x))$

(2) $\neg\exists x\ (C(x) \wedge \forall y\ (E(y) \rightarrow F(x,y))$

(3) $\forall x\ (C(x) \rightarrow \exists y\ (E(y) \wedge \neg F(x,y))$

(4) $\forall x\ (E(x) \rightarrow \exists y\ (C(y) \wedge \neg F(y,x))$

Parmi ces formules :

a. laquelle ou lesquelles représente(nt) bien le sens de la phrase ?

b. pour les formules qui ne conviennent pas, expliquer le problème et dire, si c'est possible, à quelle phrase de la langue elles correspondent.