

COURS 2

Sémantique du calcul des prédicats (1) : interprétation dans un modèle des constantes d'individus et de prédicats.

1) SENS, DENOTATION ET REFERENCE

1.1 Sens et dénotation des phrases

- Comprendre le sens d'une phrase, c'est savoir dire dans quels mondes (ou situations) elle est vraie et dans quels mondes (ou situations) elle est fausse.
- Connaître la dénotation d'une phrase, c'est savoir dire si elle est vraie ou fausse.

→ **Sens ≠ Dénotation**

Dénotation : évaluation dans un monde.

Sens : capacité à évaluer quel que soit le monde.

On peut comprendre une phrase sans connaître sa dénotation.

- (1) a. *Il y a quatorze planètes qui gravitent autour de l'étoile Sirius.*
 b. *Le plus grand des singes mesure 5,20 m.*
 c. *Le père d'Alexandre le Grand était infirme.*

Selon Frege, une phrase dénote une valeur de vérité (V ou F) et a pour sens une pensée.

1.2 Sens et dénotation des GN

- Un nom propre dénote un individu dans le monde, mais n'a pas de sens (ou très peu).
- Une description définie a à la fois une dénotation et du sens.

Le sens = mode de donation de la dénotation (Frege).

- (2) a. *Le roi de France* en 1789 = Louis XVI vs. en 1830 = Louis-Philippe
 b. *Le plus grand des nombres pairs*

Rq : une expression peut avoir du sens mais pas de référence (cf (2b)).

Rq terminologique :

- Une expression linguistique **dénote**, a une certaine **dénotation** (sémantique)
- Le locuteur fait **référence** à telle ou telle chose quand il utilise telle expression (pragmatique)

Questions :

Dans le cadre d'une approche compositionnelle, à quoi correspondent le sens et la dénotation des autres constituants de la phrase (le verbe, le groupe verbal...)?

Richard Montague : *English as a Formal Language*

Le langage naturel peut être traité comme un système formel interprété.

2) DE LA LANGUE A L'INTERPRETATION

2.1 Interpréter les formules du calcul des propositions

- décrire les situations dans lesquelles une proposition complexe est vraie en précisant la valeur de vérité des propositions atomiques qui la composent.

(3) $(p \rightarrow q) \rightarrow \neg p$

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$(p \rightarrow q) \rightarrow \neg p$
V	V	V	F	F
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Chaque situation est identifiée à un ensemble de propositions.

2.2 Interpréter le calcul des prédicats

On analyse les propositions en distinguant les entités dont elles parlent et les prédicats ou les relations qu'elles postulent entre ces entités. Chaque situation va être identifiée à un ensemble d'information décrivant les individus dont on parle et les propriétés qu'on leur attribue.

- (4) a. *Jean aime Marie.*
b. $A(j,m)$

Un modèle est comme une description (au moins partielle) du monde, qui stipule :

- (i) quelles sont les entités du monde dont le discours parle
- (ii) quelles propriétés ont ces entités c.a.d. qui est qui (interprétation des constantes d'individus) et qui fait quoi, qui est comment *etc* (interprétation des constantes de prédicats).

3) LES MODELES ENSEMBLISTES

3.1 Un exemple

Imaginons un monde réduit à trois individus (Marie, Jean et Pierre), dont tout ce qu'on puisse dire c'est que Marie est une fille, Jean et Pierre deux garçons, que Marie aime Pierre mais n'aime pas Jean et que ni Jean ni Pierre n'aime Marie. Ajoutons que Jean et Pierre ne s'aiment pas non plus.

Traduisons ce qu'on peut dire de ce monde dans le calcul des prédicats : on utilise trois constantes d'individus (m, j, p) et trois prédicats, un binaire $A(x,y)$ et deux unaires $G(x)$ et $F(x)$.

Définissons la sémantique de ce langage en termes ensemblistes. On a :

- un domaine d'interprétation D qui permet d'avoir accès à la signification des constantes. Ici, les constantes réfèrent aux trois individus désignés par les noms Marie, Jean et Pierre. On pose donc $D = \{\text{MARIE, JEAN, PIERRE}\}$

- des prédicats qu'on associe à l'ensemble des individus qui les vérifient. Donc

$F = \{\text{MARIE}\}$

$G = \{\text{JEAN, PIERRE}\}$

$A = \{(\text{MARIE, PIERRE})\}$

Exercice 1 :

Est-ce que les formules suivantes sont vraies ou fausses dans cette interprétation ?

$F(m), F(j), F(p) \vee F(j), G(m), G(p) \wedge G(j)$

$A(m,j), G(m,p), \neg A(j,m)$

3.2 Modèles, domaines et fonction d'interprétation

Définition :

Un modèle \mathcal{M} , c'est une paire $\langle D, \mathcal{I} \rangle$ où

- D est un ensemble non vide d'entités appelé domaine d'interprétation

- \mathcal{I} est une fonction, appelée fonction d'interprétation, qui projette les constantes d'individus dans D et chaque prédicat n -aire dans D^n .

Notation :

On note $[[\alpha]]$ ou $\mathcal{I}(\alpha)$ la valeur sémantique de α et $[[\alpha]]^{\mathcal{M}}$ la valeur sémantique de α dans le modèle \mathcal{M} .

$[[\alpha]] = V$ ssi $[[\alpha]]^{\mathcal{M}} = V$ pour tout modèle \mathcal{M} .

3.3 De la langue naturelle à l'interprétation dans un modèle

Langue naturelle <i>phrases et mots</i>	→	Calcul des prédicats <i>formules avec constantes d'individu et constantes de prédicat</i>	→	Interprétation dans un modèle <i>domaine & fonction d'interprétation</i>
--	---	--	---	---

LN : Jean est malade.

Calcul des prédicats : $M(j)$ avec j pour Jean ; $M(x)$ pour x est malade.

Modèle : $\mathcal{M} = \langle \{JEAN, PIERRE, MARIE\}, I \rangle$ tel que
 $I(j) = JEAN, I(m) = MARIE, I(p) = PIERRE$ et
 $I(M) = \{MARIE, JEAN\}$

Evaluation : $[[M(j)]] = 1$ ssi $I(j) \in I(M)$.
 Or : $I(j) = JEAN$ et $I(M) = \{MARIE, JEAN\}$
 Puisque $JEAN \in \{MARIE, JEAN\}$, $M(j)$ est vrai dans le modèle \mathcal{M} .

Modèles extensionnels : prédicats = ensemble de n-uplets vs

Modèles intensionnels : prédicats = propriétés (M =l'ensemble des personnes malades, D = l'ensemble des entiers naturels...)

4) APPLICATIONS

4.1 Chercher un modèle dans lequel interpréter un langage (ou une formule donnée)

Exemple 1.

Modèles pour un langage L avec 3 constantes d'individus (a, b, c) et 2 constantes de prédicats (F un prédicat unaire et C un prédicat binaire) :

Une interprétation possible de L (I1)

- Domaine $D1 = \{Alan, Bob, Bill, Boule\}$
- Interprétation des constantes de L (deux modes de notation) :

$I1(a) = Alan$	$I1 : a \rightarrow Alan$
$I1(b) = Bob$	$b \rightarrow Bob$
$I1(c) = Bill$	$c \rightarrow Bill$
- Interprétation des prédicats de L
 - $I1(F) = \{Alan, Boule\}$
 - $I1(C) = \{(Alan, Bill), (Bob, Bill), (Bill, Bill)\}$

RQ : il peut y avoir plus d'individu dans le modèle que de constante dans le langage. Cela correspond aux cas où il y a des individus qui ne sont pas nommés, qui n'ont pas de nom propres.

Une autre interprétation possible de L (I2)

- Domaine $D2 = \mathbb{N}$ (ensemble des entiers naturels)
- Interprétation des constantes de L :

$I2(a) = 0$
$I2(b) = 1$
$I2(c) = 1$
- Interprétation des prédicats de L (deux modes de notation) :

$I2(F) = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$	x appartient à $I2(F)$ ssi x est pair
$I2(C) = \{(0,1), (1,2), (2,3), \dots\}$	(x,y) appartient à $I2(C)$ ssi x a pour successeur y

ATTENTION : dans le domaine, il peut y avoir plus d'individus que de constantes dans le langage logique.

Exemple 2. Considérons le langage L qui ne comporte qu'un symbole de constante j et un symbole de prédicat M , on peut écrire la formule suivante $\forall x M(x)$. Pour savoir si cette formule est vraie dans le domaine $\mathcal{M} = \langle D = \text{l'ensemble des français}, I \rangle$ tq $I(j) = \text{Jean}$ et $I(M) = D$, il ne suffit pas de vérifier que Jean est malade.

Exercice 2. Reprendre les formules associées aux phrases ci-dessous et imaginer un modèle qui vérifie chacune d'elles, puis un modèle qui falsifie chacune d'elles.

- i. Perceval a trouvé un vase qui a appartenu à Joseph.
- ii. Seul Gauvain comprend Yvain.

4.2 Evaluer une formule dans un modèle donné

a) Cas des formules sans variable ni quantificateur

Définition 1. Interprétation des constantes d'individus et de prédicats

Soit un modèle $\mathcal{M} = \langle D, \mathcal{I} \rangle$

- Si α est une constante d'individu, alors $[[\alpha]]^{\mathcal{M}} = \mathcal{I}(\alpha)$ cad l'individu du domaine assigné à α par \mathcal{I}
- Si P est un prédicat n -aire, alors $[[P]]^{\mathcal{M}} = \mathcal{I}(P)$ cad un ensemble de n -uplets du domaine. $\mathcal{I}(P) \subseteq D^n$.

Définition 2. (de la dénotation d'une formule dans un modèle par induction sur les formules sans variable)

- Si P est un prédicat n -aire et a_1, \dots, a_n sont des constantes d'individus, alors $[[P(a_1, \dots, a_n)]]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $(\mathcal{I}(a_1), \dots, \mathcal{I}(a_n)) \in \mathcal{I}(P)$. Sinon, $[[P(a_1, \dots, a_n)]]^{\mathcal{M}} = 0$.
- Si F est une formule, alors $[[\neg F]]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[[F]]^{\mathcal{M}} = 0$
- Si F et G sont deux formules, $[[F \wedge G]]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[[F]]^{\mathcal{M}} = 1$ et $[[G]]^{\mathcal{M}} = 1$
- Si F et G sont deux formules, $[[F \vee G]]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[[F]]^{\mathcal{M}} = 1$ ou $[[G]]^{\mathcal{M}} = 1$
- Si F et G sont deux formules, $[[F \rightarrow G]]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[[F]]^{\mathcal{M}} = 0$ ou $[[G]]^{\mathcal{M}} = 1$

b) Cas des formules quantifiées

Exercice 3. Soit un langage ne comprenant aucune constante d'individu et quatre constantes de prédicats unaires, A, B, C, D .

1) Soit le modèle suivant $\mathcal{M} = \langle \{\text{JEAN, PIERRE, MARIE}\}, I \rangle$ tq

$$I(A) = \{\text{MARIE}\}$$

$$I(B) = \{\text{JEAN, PIERRE}\}$$

$$I(C) = \emptyset$$

$$I(D) = \{\text{MARIE, JEAN, PIERRE}\}$$

Est-ce que les formules suivantes sont vraies ou fausses dans cette interprétation ?

a) $\exists x (A(x) \wedge B(x))$

b) $\forall x (B(x) \rightarrow \neg A(x))$

c) $\forall x (C(x) \rightarrow B(x))$

d) $\exists x ((A(x) \vee B(x)) \rightarrow \neg C(x))$

2) Même question, en ajoutant un prédicat binaire R tq $I(R) = \{(\text{MARIE, JEAN}), (\text{MARIE, PIERRE})\}$

a) $\exists x \exists y (A(x) \wedge B(y))$

b) $\forall x (B(x) \vee \exists y R(x, y))$

c) $\exists x \forall y (B(y) \rightarrow R(x, y))$

c) $\forall y \exists x (B(y) \rightarrow R(x, y))$

Reste la question de l'interprétation des variables. Deux méthodes existent. Cf cours 3.