Licence 3 : sémantique compositionnelle
Vendredi 10 mars 2017
Devoir sur table - durée 1h30

Exercice 1 (10 points)
Soit le modèle $\mathcal{M}$ défini sur le domaine D ={ANDRE, BEA, CHLOE, DENIS} et dont la fonction d'interprétation $\mathcal{I}$ est la suivante :

$\mathcal{I}$(a) = ANDRE, $\mathcal{I}$(b) = BEA, $\mathcal{I}$(c) = CHLOE, $\mathcal{I}$(d) = DENIS,

$\mathcal{I}$ (A) = {(ANDRE, ANDRE), (ANDRE, BEA), (CHLOE, BEA)}

$\mathcal{I}$ (E) = { BEA, CHLOE)}

$\mathcal{I}$ (P) = { DENIS, ANDRE}

1. Dire si les formules qui suivent sont vraies ou fausses dans ce modèle.
(i) $\forall x(E(x) \rightarrow \exists y\ (E(y) \wedge A(x,y)))$
La formule est fausse dans le modèle. Car il n'a pas de y tq A(BEA,y)
(ii) $\exists x \exists y\ (P(x) \wedge \neg A(x,y))$
La formule est vraie car Denis n'aime personne, donc par exemple ¬A(DENIS,CHLOE)
(iii) $\exists x\ (E(x) \wedge \forall y\ (P(y) \rightarrow (\neg A(x,y) \wedge \neg A(y,x)))\ )$
La formule est vraie car Chloe n'aime aucun prof et n'est aimée d'aucun prof.

2. Associer aux prédicats A, P et E une expression de la langue naturelle et dire à quelle phrase de la langue naturelle correspond la formule (iii).
Si A (x,y) signifie x aime y, E(x), x est étudiant et P(x) x est professeur, on peut associer à (iii) : il y a un étudiant qui n'aime aucun professeur et qu'aucun professeur n'aime.

3. Changer le modèle $\mathcal{M}$ de façon à rendre la formule (iii) fausse si elle est vraie, et vraie si elle est fausse.
(iii) est vraie dans $\mathcal{M}$. Pour la rendre fausse, il suffit d'ajouter à l'interprétation de A (CHLOE, DENIS) par exemple. Mais il y a beaucoup d'autres solutions possibles.

Exercice 2 (10 points)
Soit les phrases suivantes :
(1) Tout le monde n'a pas pu discuter avec tout le monde.
(2) Il y a quelqu'un qui n'a pas pu discuter avec qui que ce soit.

1. Traduire ces deux phrases dans le calcul des prédicats.
Vocabulaire :
H(x) : x est un homme.
D(x,y) : x a pu discuté avec y
(1) $\neg \forall x(H(x) \rightarrow \forall y(H(y) \rightarrow D(x,y)))$ ou encore $\exists x \exists y\ (H(x) \wedge H(y) \wedge \neg D(x,y))$
(2) $\exists x(H(x) \wedge \forall y(H(y) \rightarrow \neg D(x,y)))$

2. Trouver un modèle qui vérifie à la fois (1) et (2).
Soit le modèle $\mathcal{M}$ défini sur le domaine D ={ANDRE, BEA, CHLOE} et dont la fonction d'interprétation $\mathcal{I}$ est la suivante :

$\mathcal{I}$(a) = ANDRE, $\mathcal{I}$(b) = BEA, $\mathcal{I}$(c) = CHLOE

$\mathcal{I}$ (D) = {(ANDRE, BEA), (ANDRE, CHLOE), (CHLOE, ANDRE), (CHLOE, BEA)}

Ce modèle vérifie (1) car Bea n'a pas pu discuter avec André.
Ce modèle vérifie (2) car Bea n'a pas pu discuter ni avec André, ni avec Chloe.

3. Trouver un modèle qui falsifie à la fois (1) et (2).

Soit le modèle $\mathcal{M}$ défini sur le domaine D ={ANDRE, BEA, CHLOE} et dont la fonction d'interprétation $\mathcal{I}$ est la suivante :

$\mathcal{I}$(a) = ANDRE, $\mathcal{I}$(b) = BEA, $\mathcal{I}$(c) = CHLOE

$\mathcal{I}$ (D) = {(ANDRE, BEA), (ANDRE, CHLOE), (BEA, ANDRE), (BEA, CHLOE), (CHLOE, ANDRE), (CHLOE, BEA)}

Ce modèle falsifie (1) car tout le monde a discuté avec tout le monde.
Ce modèle falsifie (2) car à la fois Bea, andré et Chloe ont pu discuter avec quelqu'un.

4. Trouver un modèle qui permette de dire si ces deux phrases sont équivalentes ou non.

Il faut un modèle qui vérifie (1) mais pas (2). Cela prouvera que les formules ne sont pas équivalentes. Soit $\mathcal{M}$' défini sur le domaine D ={ANDRE, BEA, CHLOE} et dont la fonction d'interprétation $\mathcal{I}$ est la suivante :

$\mathcal{I}$(a) = ANDRE, $\mathcal{I}$(b) = BEA, $\mathcal{I}$(c) = CHLOE

$\mathcal{I}$ (D) = {(ANDRE, CHLOE), (BEA, CHLOE), (CHLOE, ANDRE), (CHLOE, BEA)}

Ce modèle vérifie (1) car André et Bea n'ont pas discuté ensemble.
Ce modèle falsifie (2) car à la fois André, tout comme Bea et Chloe ont pu discuter avec au moins une personne.