Licence 3 : sémantique compositionnelle
Mardi 8 mars 2016
Devoir sur table - durée 1h

Exercice 1 (4 points)
Soit le modèle suivant
D ={a,b,c,d}
A = {(a,a),(a,b),(c,b)}

Dire si la formule qui suit est vraie ou fausse dans ce modèle.
(i) $\forall x \forall y\ (A(x,y) \rightarrow \exists z\ ((z \neq x) \wedge (z \neq y) \wedge (A(x,z) \vee A(y,z))))$
La formule est fausse dans le modèle. En effet, on peut vérifier que dans ce modèle A(c,b) est vrai et pourtant il n'existe aucun z tel que A(c,z) ou A(b,z) soit vrai.

Si elle est vraie, changer le modèle de façon à la rendre fausse.
Si elle est fausse, changer le modèle de façon à la rendre vraie.
(i) est fausse dans le modèle ci-dessus, il faut donc changer ce modèle pour rendre la formule (i) vraie. Il y a une infinité de possibilités. L'une consiste à garder le même domaine, mais à changer l'interprétation.
On peut ajouter dans l'interprétation de A le couple (b,a). Du coup (c,b) ne constitue plus un contre-exemple à (i).
Il faut alors vérifier que (i) s'applique aussi au couple (b,a) : puisque A(b,a), on doit trouver un z différent de b et de a tel que A(b,z) ou A(a,z). Ce n'est pas le cas.
On peut donc ajouter A(b,c) ou A(b,d) ou A(a,c) ou A(a,d). Mais là encore, il faudra que cet ajout ne constitue pas un contre-exemple à (i). On voit que si on ajoute A(b,c), cela ne contrevient pas à la formule (i), car (b,a) est déjà dans A.
Donc on propose le modèle suivant qui vérifie (i) :
D ={a,b,c,d}   A = {(a,a),(a,b),(c,b), (b,a), (b,c)}

Exercice 2 (8 points)
Soit la phrase suivante :
(ii) *Jean donne à Pierre ce qu'il veut.*
Prouver que cette phrase est ambiguë en utilisant le calcul des prédicats et la théorie des modèles.

Il y a une ambiguïté qui vient de l'interprétation du pronom « il », qui peut référer soit à Jean, soit à Pierre. On a donc les deux interprétations suivantes, Int1 et Int2 :
Int1 : Jean donne à Pierre ce que lui-même, Jean, veut.
Int2 : Jean donne à Pierre ce que ce dernier, Pierre, veut.

Il y a une autre question qui se pose. Est-ce que « ce qu'il veut » signifie « tout ce qu'il veut » ou « une chose qu'il veut » ? Il me semble que l'interprétation universelle est la plus naturelle. (Mais on pourrait aussi penser que « ce qu'il veut » est un GN défini spécifique correspondant à « la chose qu'il veut ». Cela dit, un GN défini ne correspond pas à une expression quantifiée existentiellement dans le calcul des prédicats.)

Les deux formules du calcul des prédicats correspondant à ces deux interprétations sont les suivantes, où j et p sont deux constantes d'individus, et D(x,y,z) et V(x,y) deux constantes de prédicats
F1 : $\forall x\ (V(j,x) \rightarrow D(j, x, p))$
F2 : $\forall x\ (V(p,x) \rightarrow D(j, x, p))$

On peut montrer que ces deux formules ne sont pas équivalentes. En effet si on considère le modèle $\mathcal{M}$ ci-dessous, on a $\mathcal{M}$ vérifie F2 et $\mathcal{M}$ ne vérifie pas F1.

$\mathcal{M}$: <{PIERRE, JEAN, CHOSE1, CHOSE 2}, $\mathcal{I}$>

$\mathcal{I}$ (V) = {(JEAN, CHOSE1), (JEAN, CHOSE2), (PIERRE, CHOSE1)}

$\mathcal{I}$ (D) = {(JEAN, CHOSE1, PIERRE)}

Or deux formules sont équivalentes si et seulement si elles sont vraies exactement dans les même modèles.
Donc (ii) est bien ambiguë.

Exercice 3 (8 points)
Soit la phrase suivante :
(iii) *Il n'y a pas de mot de passe que personne ne puisse deviner.*

et les formules de la logique des prédicats où avec MdP(x) signifie 'x est un mot de passe', H(x) 'x est humain' et PD(x,y) 'x peut deviner y'.
(1) $\neg\exists x\,(MdP(x) \wedge \neg\exists y\,(H(y) \rightarrow PD(y,x))$
(2) $\neg\exists x\,(MdP(x) \wedge \neg\exists y\,(H(y) \wedge PD(y,x))$
(3) $\forall x\,\neg\exists y\,(MdP(x) \wedge H(y) \wedge PD(y,x))$
(4) $\forall x\,\forall y\,(MdP(x) \rightarrow (H(y) \rightarrow \neg PD(y,x)))$

Parmi ces formules :
a) laquelle ou lesquelles représente(nt) bien le sens de la phrase ?
b) pour les formules qui ne conviennent pas, expliquer le problème et dire, si c'est possible, à quelle phrase de la langue elles correspondent.

La seule formule qui traduit correctement (iii) est (2).
- En (1), le problème vient de l'implication qui suit la quantification existentielle sur y.
Prenons un modèle dans lequel il n'y a pas d'homme.
S'il n'y a pas d'homme,
$\exists y\,(H(y) \rightarrow \ldots.)$ est vrai, donc
$\neg\exists y\,(H(y) \rightarrow \ldots)$ est faux, donc
$\exists x\,(MdP(x) \wedge \neg\exists y\,(H(y) \rightarrow PD(y,x))$ est faux et donc
$\neg\exists x\,(MdP(x) \wedge \neg\exists y\,(H(y) \rightarrow PD(y,x))$ est vrai.
La formule (i) est donc vraie, et pourtant, (iii), qui signifie qu'il y a toujours quelqu'un qui peut découvrir n'importe quel mot de passe, semble fausse.
Donc cette formule ne correspond pas à la phrase.

- En (3), la formule ne convient pas car elle asserte que tout est mot de passe, qu'il n'y a que des mots de passe. Or ce n'est pas ce que dit (iii).
$\forall x\,\neg\exists y\,(MdP(x) \wedge H(y) \wedge PD(y,x))$ est équivalent à
$\forall x\,(MdP(x) \wedge \neg\exists y\,(H(y) \wedge PD(y,x)))$.
Un traduction en langue naturelle serait : Il n'y a que des mots de passe et personne ne peut les découvrir.

- En (4), la formule ne convient pas car elle asserte que les mots de passe, les hommes, ils ne peuvent pas les découvrir. Ou en d'autres termes qu'aucun homme ne peut découvrir le moindre mot de passe.