COURS 3
Sémantique compositionnelle : interprétation dans un modèle (2)

1) LES TROIS NIVEAUX DE LANGAGE

Langue naturelle →	Calcul des prédicats →	Interprétation dans un modèle
phrases et mots	*formules avec constantes d'individu et constantes de prédicat*	*domaine & fonction d'interprétation*

Exemple :

LN : Jean est malade.

Calcul des prédicats : M(j) avec j →Jean ; M(x) → x est malade.

Modèle : $\mathcal{M}$ = < {JEAN, PIERRE, MARIE}, I> tq
I(j) = JEAN, I(m) = MARIE, I(p) = PIERRE et
I(M) = {MARIE, JEAN} cad si JEAN ∈ {MARIE, JEAN}
[[M(j)]] = 1 ssi I(j) ∈ I(M). M(j) est vrai dans le modèle $\mathcal{M}$.

Modèles extensionnels : prédicats = ensemble de n-uplets *vs*
Modèles intensionnels : prédicats = propriétés (M=l'ensemble des personnes malades, D= l'ensemble des entiers naturels…)
Un modèle est comme une description (au moins partielle) du monde. Il stipule
(i) quelles sont les entités du monde par son domaine
(ii) quelles propriétés ont ces entités c.a.d. qui est qui (interprétation des constantes d'individus) et qui fait quoi, qui est comment *etc* (interprétation des constantes de prédicats).

Exemple1. Modèles pour un langage L avec 3 constantes d'individus et 2 constantes de prédicats :
Une interprétation possible de L (I1)
• Domaine D1 = {Alan, Bob, Bill, Boule}
• Interprétation des constantes de L (deux modes de notation) :

I1(a) = Alan	I1 : a → Alan
I1(b) = Bob	b → Bob
I1(c) = Bill	c → Bill

• Interprétation des prédicats de L
I1 (F) = {Alan, Boule}
I1(C) = {(Alan, Bill), (Bob, Bill), (Bill, Bill)}

Une autre interprétation possible de L (I2)
• Domaine D2 = N (ensemble des entiers naturels)
• Interprétation des constantes de L :
I2(a) = 0
I2(b) = 1
I2(c) = 1
• Interprétation des prédicats de L (deux modes de notation) :

I2 (F) = {0, 2, 4, 6, …}	x appartient à I2(F) ssi x est pair
I2(C) = {(0,1), (1,2), (2,3), …}	(x,y) appartient à I2(C) ssi x a pour successeur y

ATTENTION : dans le domaine, il peut y avoir plus d'individus que de constantes dans le langage logique.

Exemple 2. Considérons le langage L qui ne comporte qu'un symbole de constante j et un symbole de prédicat M, on peut écrire la formule suivante $\forall x M(x)$. Pour savoir si cette formule est vraie dans le domaine $\mathcal{M}$ = < D=l'ensemble des français}, I> tq I(j) = Jean et I(M)= D, il ne suffit pas de vérifier que Jean est malade.

Exercice 1. Reprendre les formules associées aux phrases ci-dessous (cf Cours 1) et imaginer un modèle qui vérifie chacune d'elles, puis un modèle qui falsifie chacune d'elles.

i. Perceval a trouvé un vase qui a appartenu à Joseph.
ii. Seul Gauvain comprend Yvain.

2) EVALUATION D'UNE FORMULE DANS UN MODELE

Un modèle $\mathcal{M}$, c'est une paire $<D,\mathcal{I}>$ où
- D est un ensemble <u>non vide</u> d'entités appelé domaine d'interprétation
- $\mathcal{I}$ est une fonction, appelée fonction d'interprétation, qui projette les constantes d'individus dans D et chaque prédicat n-aire dans D^n .

On note $[[\alpha]]$ la valeur sémantique de α et $[[\alpha]]^{\mathcal{M}}$ la dénotation de α dans le modèle.

2.1 Evaluation d'une formule non quantifiée

<u>Définition 1.</u> Interprétation des constantes non logiques (constantes d'individus et de prédicats)
Soit un modèle $\mathcal{M} = <D,\mathcal{I}>$

- Si α est une constante d'individu alors $[[\alpha]]^{\mathcal{M}}=\mathcal{I}(\alpha)$ cad l'individu du domaine assigné à α par $\mathcal{I}$
- Si P est une constante de prédicat n-aire alors $[[P]]^{\mathcal{M}}=\mathcal{I}(P)$ cad un ensemble de n-uplets du domaine. $\mathcal{I}(P) \subseteq D^n$.

<u>Définition 2.</u> (de la dénotation d'une formule dans un modèle par induction sur les formules sans variable)
- Si P est un prédicat n-aire et a1,…an sont des constantes d'individus, alors
  $[[P(a1, \ \ ,an)]]^{\mathcal{M}}= 1$ ssi $(\mathcal{I}(a1),\ldots,\mathcal{I}(an)) \in \mathcal{I}(P)$. Sinon, $[[P(a1, \ \ ,an)]]^{\mathcal{M}}= 0$.
- Si F est une formule, alors $[[\neg F]]^{\mathcal{M}}= 1$ ssi $[[F]]^{\mathcal{M}}= 0$
- Si F et G sont deux formules, $[[F\wedge G]]^{\mathcal{M}}= 1$ ssi $[[F]]^{\mathcal{M}}= 1$ et $[[G]]^{\mathcal{M}}= 1$
- Si F et G sont deux formules, $[[F\vee G]]^{\mathcal{M}}= 1$ ssi $[[F]]^{\mathcal{M}}= 1$ ou $[[G]]^{\mathcal{M}}= 1$
- Si F et G sont deux formules, $[[F\rightarrow G]]^{\mathcal{M}}= 1$ ssi $[[F]]^{\mathcal{M}}= 0$ ou $[[G]]^{\mathcal{M}}= 1$

2.2 Evaluation d'une formule quantifiée

Exercice 2. Soit un langage ne comprenant aucune constante d'individu et quatre constantes de prédicats unaires, A, B, C, D.

1) Soit le modèle suivant $\mathcal{M}$ = < {JEAN, PIERRE, MARIE}, I> tq

I(A) = {MARIE}	I(B) = {JEAN, PIERRE}
I(C) = ø	I(D) = {MARIE, JEAN, PIERRE}

Est-ce que les formules suivantes sont vraies ou fausses dans cette interprétation ?

a) $\exists x\ (A(x) \wedge B(x))$	b) $\forall x\ (B(x) \rightarrow \neg A(x))$
c) $\forall x\ (C(x) \rightarrow B(x))$	d) $\exists x\ ((A(x) \vee B(x)) \rightarrow \neg C(x))$

2) Même question, en ajoutant un prédicat binaire R tq I(R)= {(MARIE, JEAN), (MARIE, PIERRE)}

a) $\exists x \exists y\ (A(x) \wedge B(y))$	b) $\forall x\ (B(x) \vee \exists y\ R(x,y))$
c) $\exists x\ \forall y\ (B(y) \rightarrow R(x,y))$	c) $\forall y\ \exists x\ (B(y) \rightarrow R(x,y))$

Reste la question de l'interprétation des variables. Deux méthodes existent.

A) La méthode des substitutions

Méthode applicable seulement si à chaque individu du domaine est associée au moins une constante du langage logique.

Rappel : différence entre variables libres et variables liées. La portée d'un quantificateur.

Exercice 3. Dans les formules suivantes, préciser quelles sont, s'il y en a les occurrences libres et les occurrences liées de x et de y.

a) $\exists x\, A(x) \wedge B(y)$ b) $\exists x\, \exists y\, (A(x) \wedge B(y))$ c) $\exists x\, A(x) \wedge \exists y\, B(y)$

d) $\forall x\, (B(x) \vee \exists y\, R(x,y))$ e) $\forall x\, B(x) \vee \exists y\, R(x,y))$ f) $\forall x\, (B(x) \vee \exists x\, R(x,x))$

g) $\forall x\, \exists y\, R(x,y) \wedge \exists x\, B(x)$ h) $\exists y\, R(x,y) \wedge \exists x\, B(x)$

Substitution : soit F une formule et x une variable et c une constante. On note [c/x]F le résultat de la substitution de toutes les occurrences libre de x dans F par c.

Exercice 4. Pour chaque formule de l'exercice 3, calculer le résultat de la substitution de x par c et de y par d.

<u>Définition 3.</u> Dénotation d'une formule dans un modèle par induction sur les formules

- Si P est un prédicat n-aire et a1,…an sont des constantes d'individu,

  alors $[[P(a1, \ \ ,an)]]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $(\mathcal{I}(a1),\ldots,\mathcal{I}(an)) \in \mathcal{I}(P)$. Sinon, $[[P(a1, \ \ ,an)]]^{\mathcal{M}} = 0$.
- Si F est une formule, alors $[[\neg F]]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[[F]]^{\mathcal{M}} = 0$
- Si F et G sont deux formules, $[[F \wedge G]]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[[F]]^{\mathcal{M}} = 1$ et $[[G]]^{\mathcal{M}} = 1$
- Si F et G sont deux formules, $[[F \vee G]]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[[F]]^{\mathcal{M}} = 1$ ou $[[G]]^{\mathcal{M}} = 1$
- Si F et G sont deux formules, $[[F \rightarrow G]]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[[F]]^{\mathcal{M}} = 0$ ou $[[G]]^{\mathcal{M}} = 1$
- Si F est une formule, $[[\exists x\, F]]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi il existe au moins une constante c telle que $[[(c/x)\, F]]^{\mathcal{M}} = 1$
- Si F est une formule, $[[\forall x\, F]]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi pour toutes les constantes c du langage $[[(c/x)\, F]]^{\mathcal{M}} = 1$

B) La méthode des assignations

Plus générale, et nécessaire pour traiter des cas où il y a moins de constantes dans le langage que d'individus dans le domaine.

Une assignation est **une fonction des variables dans les éléments du domaine** d'interprétation.

> On dira qu'une assignation A' est une variante en x de l'assignation A si A'(z) = A(z) pour toute variable z autre que x. L'idée est qu'un variable libre n'a pas d'interprétation en soit, mais seulement par rapport à une assignation.

<u>Définition 4</u>. Interprétation dans un modèle par induction sur les formules

- Soit t est un terme,

  $[[t]]^{\mathcal{M},g} = \mathcal{I}(t)$ si t est une constante et

  $[[t]]^{\mathcal{M},g} = g(t)$ si t est une variable.
- Si P est un prédicat n-aire et t1,…tn sont des termes, alors $[[P(t1, \ \ ,tn)]]^{\mathcal{M},g} = 1$ ssi $([[t1]]^{\mathcal{M},g}),\ldots, [[tn]]^{\mathcal{M},g} \in \mathcal{I}(P)$. Sinon, $[[P(t1, \ \ ,tn)]]^{\mathcal{M},g} = 0$.
- Si F est une formule, alors $[[\neg F]]^{\mathcal{M},g} = 1$ ssi $[[F]]^{\mathcal{M},g} = 0$
- Si F et G sont deux formules, $[[F \wedge G]]^{\mathcal{M},g} = 1$ ssi $[[F]]^{\mathcal{M}\,g} = 1$ et $[[G]]^{\mathcal{M},g} = 1$
- Si F et G sont deux formules, $[[F \vee G]]^{\mathcal{M},g} = 1$ ssi $[[F]]^{\mathcal{M},g} = 1$ ou $[[G]]^{\mathcal{M},g} = 1$

- Si F et G sont deux formules, $[[F\rightarrow G]]^{\mathcal{M},g}= 1$ ssi $[[F]]^{\mathcal{M},g}= 0$ ou $[[G]]^{\mathcal{M},g}= 1$
- Si F est une formule, $[[\exists x\ F]]^{\mathcal{M},g}= 1$ ssi il existe une assignation g' différente de g en x telle que $[[F]]^{\mathcal{M},g'}= 1$
- Si F est une formule, $[[\forall x\ F]]^{\mathcal{M},g}= 1$ ssi pour toutes les assignations g' différentes de g en x $[[F]]^{\mathcal{M},g'}= 1$

Exercice 5. Soit les prédicats unaires A, B, C, et les formules :
a) $\exists x\ (A(x) \wedge B(x))$ b) $\forall x\ (\neg B(x) \rightarrow A(x))$
i) Trouver une interprétation qui vérifie simultanément les formules a et b.
ii) Trouver une interprétation qui falsifie la formule b.

3) EQUIVALENCE ET AMBIGUITE

Soit une phrase de la langue naturelle, qu'on vous demande de formaliser dans le calcul des prédicats et pour laquelle deux représentations sont proposées. Comment vérifier si ces deux représentations sont équivalentes ou si la phrase est ambiguë ?
Deux formules sont équivalentes ssi elles sont vraies exactement dans les mêmes modèles.
Une formule est ambiguë quand on peut lui associer deux représentations qui ne sont pas équivalentes.
Pour montrer que deux formules ne sont pas équivalentes, il suffit de trouver un modèle qui vérifie l'une d'elle et falsifie l'autre.
Si on trouve un modèle qui vérifie les deux formules, cela ne prouve rien.
Si on trouve un modèle qui falsifie les deux formules, cela ne prouve rien.

Exercice 6. Les phrases suivantes sont-elles ambiguës ? Si oui, le montrer en formalisant chaque interprétation et en montrant que ces interprétations ne sont pas équivalentes.
(1) Jean et Marie aime une femme.
(2) Un tuteur a pris en charge tous les étudiants.
(3) Personne n'a eu aucun problème.