COURS 7-8-9
Logique des prédicats (2) : variables et quantifications

1) SYNTAXE DU CALCUL DES PREDICATS
a) Vocabulaire
On dispose :
- d'un ensemble dénombrable de constantes individuelles : a, b, c, ...
- d'un ensemble dénombrable de variables individuelles : x, y, z, x1, x2 ....
- d'un ensemble dénombrable de lettre de prédicats : P, Q, R...
- du prédicat d'égalité =
- des connecteurs de la logique propositionnelle : $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
- des deux quantificateurs : $\forall$, $\exists$
- des parenthèses ouvrantes et fermantes.

b) Les formules bien formées
On définit l'ensemble des formules bien formées comme suit :
- si t1 et t2 sont des constantes individuelles ou des variables individuelles, alors t1 = t2 est une formule bien formée.
- si P est un prédicat n-aire et t1,...,tn des constantes individuelles ou des variables, alors P(t1, ...,tn) est une formule bien formée.
- si Φ et Γ sont des formules bien formées, alors $\neg\Phi$, $\Phi \wedge \Gamma$, $\Phi \vee \Gamma$, $\Phi \rightarrow \Gamma$ et $\Phi \leftrightarrow \Gamma$ le sont aussi.
- si Φ est une formule bien formée et x une variable individuelle, alors $\forall x\Phi$ et $\exists x\Phi$ le sont aussi.
- rien d'autre n'est bien formé.

Les deux premières clauses permettent de définir les **formules atomiques.**

Exercice 1 :
Les formules suivantes sont-elles bien formées, sachant que P est un prédicat unaire, B et R des prédicats binaires ?
B(a,c), P(a), $\forall$x P(x), $\forall$x$\exists$y R(x,y), R(a), R(a,x), R(a,c), B(a, P(x)).

Exercice 2 :
Soit la phrase suivante :

Claude et Dominique se sont battus hier.

(i) En donner une représentation dans le calcul des propositions.
(ii) En donner une représentation dans le calcul des prédicats.
Si la phrase est ambiguë, étudier tous les sens différents qu'elle peut avoir.

Exercice 3 :
Comment traduire les phrases suivantes dans le calcul des prédicats ?

1. Marion est une femme.	*2. Marion est heureuse.*
3. Marion est une femme heureuse.	*4. Marie épouse Jean.*

2) LA QUANTIFICATION
2.1 La quantification existentielle
(1) a. Jean a offert quelquechose à Marie. b. $\exists$x O(j,x,m)

2.2 La quantification universelle
(2) a. Jean aime tout. b. $\forall$x A(j,x)

A noter :

(3) a. $\forall x\ F(x) \leftrightarrow \neg\exists x\ \neg F(x)$

b. $\forall x\ \neg F(x) \leftrightarrow \neg\exists x\ F(x)\ )$

c. $\neg\forall x\ F(x) \leftrightarrow \exists x \neg F(x)$

2.3 La quantification restreinte

(4) a. Jean aime tout le monde. b. $\forall x\ (H(x) \rightarrow A(j,x))$

Exercice 4 :

Formaliser dans le calcul des prédicats les phrases suivantes. Quels conclusions en tirer ?

(1) Jean a offert un livre de Chomsky à Marie.

(2) Jean a offert plusieurs livres de Chomsky à Marie.

(3) Jean a offert tous les livres de Chomsky à Marie.

RQ : Différence entre variable libre et variable liée. Différence entre formule et phrase.

2.4 La notion de portée

Quand une variable est dans la portée d'un quantificateur, elle est dite liée. La logique des prédicats permet de représenter des hiérarchies de portée. On distingue 4 cas :

1. $\forall x\ \exists y\ F(x, y)$
2. $\exists x\ \forall y\ F(x, y)$
3. $\exists x\ \exists y\ F(x, y)$
4. $\forall x\ \forall y\ F(x, y)$

• quantification et négation

(5) a. Pierre n'aime pas toutes les filles.

b. Pierre n'aime aucune fille.

c. Pierre n'aime pas une fille = il y a au moins une fille que Pierre n'aime pas.

• quantification et modaux

(6) Tout le monde peut entrer dans cette salle.

• quantification et interrogation

(7) A qui Jean a-t-il vendu chaque livre ?

A qui Jean a-t-il vendu tous les livres ?

2.5 L'asymétrie sujet / objet

(8) Tout le monde aime quelqu'un.

Quelqu'un aime tout le monde.

Tout le monde est aimé de quelqu'un.

Quelqu'un est aimé de tout le monde.

2.6 Equivalences remarquables

Toutes les formules suivantes ne sont pas équivalentes :

(9) a. $\forall x\ F(x) \wedge \forall x\ G(x)$

b. $\forall x\ (F(x) \wedge G(x))$

c. $\forall x\ (F(x)) \wedge G(x)$

(10) a. $\exists x\ F(x) \wedge \exists x\ G(x)$

b. $\exists x \ (F(x) \wedge G(x))$
c. $\exists x \ (F(x)) \wedge G(x)$

Exercice 5 :
Comment traduire les phrases suivantes dans le calcul des prédicats ?

1. *Tout le monde est venu.*
2. *Tous les enfants sont venus.*
3. *Personne n'est venu.*
4. *Nul enfant n'est venu.*
5. *Quelqu'un est venu.*
6. *Un enfant est venu.*

Exercice 6 :
Trouver la formule logique qui généralise les deux faits suivants :

(1) A chaque fois que Marie achète un livre à Pierre alors Pierre vend un livre à Marie, et réciproquement.
(2) Marie possède quelque chose si et seulement si ce quelque chose appartient à Marie.

Exercice 7 :
Traduire les phrases suivantes en logique des prédicats et, en cas d'ambiguïté, donner toutes les traductions correspondantes.

(1) Fido aime quelqu'un.
(2) Tous les Brésiliens aiment danser.
(3) Tout est noir ou blanc.
(4) Toutes les photos sont en noir et blanc.
(5) Jean n'a lu aucun livre.
(6) Jean n'a peur de rien.
(7) Bien que personne ne fasse de bruit, Jean ne parvient pas à se concentrer.
(8) Tous les étudiants, sauf Jean, sont présents.
(9) Jean n'a pas dit quoi que ce soit de nouveau.
(10) Personne d'autre que Jean n'est venu.
(11) Seuls les chômeurs ont le droit de prendre le train sans billet, mais tous les chômeurs peuvent le faire.
(12) Jean ment à Marie.
(13) Jean ment à tout le monde.
(14) Tout le monde a menti à quelqu'un.
(15) Jean fait confiance à Marie.
(16) Tout le monde fait confiance à Marie.
(17) Tout le monde fait confiance à quelqu'un.