

COURS 6 DES PROPOSITIONS AUX PREDICATS

1) LES LIMITES DU CALCUL DES PROPOSITIONS

Raisonnements non propositionnels

a) La quantification simple

- (1) *Tous les hommes sont mortels.
Or Socrate est un homme.
Donc Socrate est mortel.*

b) La quantification multiple

- (2) *Tout le monde a prévenu tous les enfants / quelqu'un.*

c) Les prédicats relationnels

- (3) *Jean est plus grand que Pierre.
Pierre est plus grand que Jacques.
Donc Jean est plus grand que Jacques*

⇒ Des propositions aux prédicats

Analyser les propositions en distinguant les individus représentés par des constantes individuelles, et les prédicats, correspondant aux propriétés prédiquées des individus.

2) LOGIQUE DES PREDICATS

2.1 Constantes et prédicats

Les différents types d'entités :

- nom propre
- coordination de noms propres
- Pronoms singuliers et pluriels
- Variables

Les différents types de prédicats :

- propriétés : prédicats unaires
- relations : prédicats n-aires

Propriétés des relations : relations converses, relations réflexives, relations symétriques, relations transitives.

Exercice 1

a) Traduire :

- (1) Marie lave Jean.
- (2) Marie se lave.
- (3) Marie est la collocataire de Jeanne.
- (4) Jeanne est la collocataire de Marie.
- (5) Marie et Jeanne sont collocataires.

b) Donner des exemples de relations transitives.

Exercice 2

Les deux phrases suivantes sont elles équivalentes ?

- (1) Jeanne, Marie et Hélène sont assises les unes à côté des autres.
- (2) Jeanne est assise à côté de Marie, Marie est assise à côté d'Hélène, et Hélène est assise à côté de Jeanne.

2.2 Variables et expressions quantifiées

• Variables et pronoms

(4) *Elle le voit souvent.*

(4') $V(x,y)$

Une variable est comparable à un pronom, qui n'a de valeur qu'en contexte, quand on peut lui assigner la même valeur que son antécédent.

(5) *Marie aime beaucoup Jean et elle le voit souvent.*

(5') $A(m,j) \wedge V(m,j)$

• Variables libres et variables liées

(6) *a. Jean le lave.*

b. Jean se lave.

c. Tout le monde se lave.

Une quantification universelle est comme une conjonction généralisée et une quantification existentielle comme une disjonction généralisée.

CONCLUSION

Analyser les propositions

Distinguer individus et prédicats

Un vocabulaire plus riche. On dispose :

- d'un ensemble dénombrable de constantes individuelles : a, b, c, ...
- d'un ensemble dénombrable de variables individuelles : x, y, z, x1, x2
- d'un ensemble dénombrable de lettre de prédicats : P, Q, R ...
- du prédicat d'égalité =
- des connecteurs de la logique propositionnelle : \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow
- des deux quantificateurs : \forall \exists
- des parenthèses ouvrantes et fermantes.

L'ensemble des formules bien formées est défini comme suit :

- si t1 et t2 sont des constantes individuelles ou des variables individuelles, alors $t1 = t2$ est une formule bien formée.
- si P est un prédicat n-aire et t1,...,tn des constantes individuelles ou des variables, alors $P(t1, \dots, tn)$ est une formule bien formée.
- si Φ et Γ sont des formules bien formées, alors $\neg\Phi$, $\Phi \wedge \Gamma$, $\Phi \vee \Gamma$, $\Phi \rightarrow \Gamma$ et $\Phi \leftrightarrow \Gamma$ le sont aussi.
- si Φ est une formule bien formée et x une variable individuelle, alors $\forall x\Phi$ et $\exists x\Phi$ le sont aussi.
- rien d'autre n'est bien formé.

Exercice 3

Représenter dans le calcul des propositions, puis dans le calcul des prédicats le raisonnement suivant :

*Si Horace aime Juliette, elle l'épousera. Si Horace n'aime pas Juliette, elle épousera Gandalf.
Or Juliette n'épousera pas Horace. Donc elle épousera Gandalf.*