

## COURS 6 DES PROPOSITIONS AUX PREDICATS

### 1) LES LIMITES DU CALCUL DES PROPOSITIONS

Raisonnements non propositionnels

#### a) La quantification simple

- (1) *Tous les hommes sont mortels.  
Or Socrate est un homme.  
Donc Socrate est mortel.*

#### b) La quantification multiple

- (2) *Tout le monde a prévenu tous les enfants / quelqu'un.*

#### c) Les prédicats relationnels

- (3) *Jean est plus grand que Pierre.  
Pierre est plus grand que Jacques.  
Donc Jean est plus grand que Jacques*

#### ⇒ Des propositions aux prédicats

Analyser les propositions en distinguant les individus représentés par des constantes individuelles, et les prédicats, correspondant aux propriétés prédiquées des individus.

### 2) LOGIQUE DES PREDICATS

#### 2.1 Constantes et prédicats

Les différents types d'entités :

- nom propre
- coordination de noms propres
- Pronoms singuliers et pluriels
- Variables

Les différents types de prédicats :

- propriétés : prédicats unaires
- relations : prédicats n-aires

Propriétés des relations : relations converses, relations réflexives, relations symétriques, relations transitives.

#### Exercice 1

a) Traduire :

- (1) Marie lave Jean.
- (2) Marie se lave.
- (3) Marie est la collocataire de Jeanne.
- (4) Jeanne est la collocataire de Marie.
- (5) Marie et Jeanne sont collocataires.

b) Donner des exemples de relations transitives.

#### Exercice 2

Les deux phrases suivantes sont elles équivalentes ?

- (1) Jeanne, Marie et Hélène sont assises les unes à côté des autres.
- (2) Jeanne est assise à côté de Marie, Marie est assise à côté d'Hélène, et Hélène est assise à côté de Jeanne.

## 2.2 Variables et expressions quantifiées

### • Variables et pronoms

(4) *Elle le voit souvent.*

(4')  $V(x,y)$

Une variable est comparable à un pronom, qui n'a de valeur qu'en contexte, quand on peut lui assigner la même valeur que son antécédent.

(5) *Marie aime beaucoup Jean et elle le voit souvent.*

(5')  $A(m,j) \wedge V(m,j)$

### • Variables libres et variables liées

(6) *a. Jean le lave.*

*b. Jean se lave.*

*c. Tout le monde se lave.*

Une quantification universelle est comme une conjonction généralisée et une quantification existentielle comme une disjonction généralisée.

## CONCLUSION

Analyser les propositions

Distinguer individus et prédicats

**Un vocabulaire plus riche.** On dispose :

- d'un ensemble dénombrable de constantes individuelles : a, b, c, ...
- d'un ensemble dénombrable de variables individuelles : x, y, z, x1, x2 ....
- d'un ensemble dénombrable de lettre de prédicats : P, Q, R ...
- du prédicat d'égalité =
- des connecteurs de la logique propositionnelle :  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$
- des deux quantificateurs :  $\forall$   $\exists$
- des parenthèses ouvrantes et fermantes.

**L'ensemble des formules bien formées** est défini comme suit :

- si t1 et t2 sont des constantes individuelles ou des variables individuelles, alors  $t1 = t2$  est une formule bien formée.
- si P est un prédicat n-aire et t1,...,tn des constantes individuelles ou des variables, alors  $P(t1, \dots, tn)$  est une formule bien formée.
- si  $\Phi$  et  $\Gamma$  sont des formules bien formées, alors  $\neg\Phi$ ,  $\Phi \wedge \Gamma$ ,  $\Phi \vee \Gamma$ ,  $\Phi \rightarrow \Gamma$  et  $\Phi \leftrightarrow \Gamma$  le sont aussi.
- si  $\Phi$  est une formule bien formée et x une variable individuelle, alors  $\forall x\Phi$  et  $\exists x\Phi$  le sont aussi.
- rien d'autre n'est bien formé.

### Exercice 3

Représenter dans le calcul des propositions, puis dans le calcul des prédicats le raisonnement suivant :

*Si Horace aime Juliette, elle l'épousera. Si Horace n'aime pas Juliette, elle épousera Gandalf.  
Or Juliette n'épousera pas Horace. Donc elle épousera Gandalf.*