Licence 2 - Logique
jeudi 29 octobre 2015 – durée 1h15

Exercice 1 (6 points)
Quelles relations sémantiques existe-t-il entre
a) la phrase (1a) et la phrase (1b),
b) la phrase (2a) et la phrase (2b) ?
Justifiez vos réponses.

(1) *a. Jean n'a pas réussi à obtenir un visa.*
b. Jean a essayé d'obtenir un visa.

(2) *a. Ou Jean n'est pas chez lui, ou il ne répond pas au téléphone.*
b. Si Jean est chez lui, il ne répond pas au téléphone.

La phrase (1b) est présupposée par la phrase (1a).
En effet, à chaque fois que (1a) est vraie, alors (1b) l'est aussi. En d'autres termes, si Jean n'a pas réussi à obtenir un visa, c'est qu'il a essayé. Mais qui plus est, cette inférence résiste si l'on nie (1a), si on interroge (1a) et si on modalise (1a). La négation d'une phrase négative étant une phrase affirmative, on peut vérifier que si Jean a réussi à obtenir un visa, c'est bien qu'il a essayé. De même, si on pose la question « Est-ce que Jean a réussi à obtenir un visa ? », alors Jean a bien essayé d'obtenir un visa. Et enfin, si on modalise (1a) et qu'on considère par exemple la phrase « Je crois que Jean n'a pas réussi à obtenir un visa », on conserve bien l'inférence (1b), à savoir que Jean a essayé d'obtenir un visa.
(1b) est donc un présupposition de (1a).

(2a) et (2b) sont des phrases équivalentes. En effet, (2a) implique (2b). Supposons que (2a) soit vrai. Alors, si Jean est chez lui, il est faux que Jean ne soit pas chez lui. Donc, le premier terme de la disjonction (2a) est faux. Puisque (2a) est vrai, le second terme de la disjonction doit être vrai. Il s'en suit que Jean ne répond pas au téléphone. Ce qui correspond exactement à (2b).
Et réciproquement, (2b) implique (2a). Supposons que (2b) soit vrai : ou bien Jean n'est pas chez lui, et dans ce cas, peu importe qu'il réponde ou non au téléphone ; ou bien, Jean est chez lui et dans ce cas, il ne répond pas au téléphone, en vertu de l'implication (2b). Donc on a bien la disjonction (2a).

Exercice 2
Soit le discours suivant :

(3) *Jean ne prend son scooter que quand il ne pleut pas. Et jamais quand il a des bagages. Aujourd'hui, non seulement Jean n'a pas de bagages mais en plus il ne pleut pas. Donc Jean prend son scooter.*

a) Associez à chaque phrase de (3) sa représentation dans le calcul des propositions. Précisez bien ce que vous faites correspondre aux différentes lettres de propositions que vous utilisez. (4 points)

On considère les propositions atomiques suivantes :
p = Jean prend son scooter
q = il pleut
r = Jean a des bagages

La première phrase de (3) '*Jean ne prend son scooter que quand il ne pleut pas*' signifie qu'il est nécessaire qu'il ne pleuve pas pour que Jean prenne son scooter. En d'autres termes que s'il pleut, Jean ne prend pas son scooter. Cela correspond à la formalisation : $p \rightarrow \neg q$. Ou, ce qui revient au même $q \rightarrow \neg p$.
La seconde phrase de (3) '*Et jamais quand il a des bagages.*' est une phrase elliptique qui signifie que Jean ne prend jamais son scooter quand il a des bagages. On a donc : que Jean ait des bagages suffit pour qu'il ne prenne pas son scooter. Ce qui correspond à la formalisation : $r \rightarrow \neg p$. Cela peut aussi se traduire par $p \rightarrow \neg r$. Si Jean prend son scooter, il n'a pas de bagages.
La troisième phrase '*Aujourd'hui, non seulement Jean n'a pas de bagages mais en plus il ne pleut pas*' correspond à une conjonction : $(\neg r \wedge \neg q)$.
Enfin la quatrième phrase '*Donc Jean prend son scooter.*' correspond à la conclusion : p.

b) Représentez formellement le raisonnement correspondant à (3). (4 points)
Le raisonnement est composé de trois prémisses, suivies d'une conclusion. On peut noter cela comme suit :

$p \rightarrow \neg q$
$r \rightarrow \neg p$
$\underline{\neg r \wedge \neg q}$
p

c) En vous appuyant sur une table de vérité, dites s'il s'agit ou non d'un raisonnement valide. (3 points)
On a trois lettres de propositions distinctes, donc la table de vérité à établir comptera 8 lignes.

p	q	r	$\neg q$	$p \rightarrow \neg q$ (H1)	$\neg p$	$r \rightarrow \neg p$ (H2)	$\neg r$	$\neg r \wedge \neg q$ (H3)	$H1 \wedge H2 \wedge H3$	$(H1 \wedge H2 \wedge H3) \rightarrow p$ (R)
V	V	V	F	F	F	F	F	F	F	V
V	V	F	F	F	F	V	V	F	F	V
V	F	V	V	V	F	F	F	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	V	F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V	V	F

La dernière ligne de la table nous montre qu'il y a un cas où les trois prémisses sont vraies, mais la conclusion fausse. Donc le raisonnement n'est pas valide. Ce cas, qui constitue un contre-exemple au raisonnement, est celui où les trois lettres de proposition sont fausses, donc où Jean ne prend pas son scooter, il ne pleut pas et Jean n'a pas de bagages.

Exercice 3 (3 points)
Les deux formules suivantes sont – elles équivalentes ?
(4) a. $\neg (p \wedge q)$
b. $\neg p \wedge \neg q$

Non. On le montre simplement en exhibant un contre-exemple. Si p est vrai et q faux, $(p \wedge q)$ est faux donc $\neg(p \wedge q)$, cad (4a), est vrai. Dans ce même cas, puisque p est vrai, $\neg p$ est faux. Et puisque q est faux, $\neg q$ est vrai. Donc $\neg p \wedge \neg q$, cad (4b), est faux. Dans ce cas, (4a) et (4b) ne sont pas des formules équivalentes, l'une est vraie, et l'autre fausse.