

## COURS 3-4

## Logique des propositions :

## Forme des raisonnements, propositions et connecteurs logiques

## I) Logique et sémantique formelle

## a) Pourquoi formelle ?

Aristote : la validité d'une inférence ne dépend pas du contenu mais de la structure des propositions et de leur enchaînement.

Modus ponens	Modus tollens
$\frac{\text{Si A alors B}}{A}$	$\frac{\text{Si A alors B}}{\text{non B}}$
$\text{Donc B}$	$\text{Donc non A}$

Repérer dans un raisonnement, les pivots (symboles logiques), ce qu'ils articulent (les propositions) et les formes qui se répètent dans les propositions.

## b) Propositions et propositions atomiques

- Une proposition est une expression complexe susceptible d'être vraie ou fausse.
- Une proposition atomique est la plus petite unité de sens susceptible d'être vraie ou fausse.

Le rôle du verbe

"le verbe est nécessaire pour constituer une vraie proposition, c'est-à-dire un discours déclaratif, porteur d'une assertion et susceptible d'être vrai ou faux." (Aristote)

## C) Symboles logiques vs non logiques

La logique a pour objet l'étude des propriétés des symboles logiques, syncatégorématiques, car ce sont ces symboles qui servent de pivot aux raisonnements.

Termes catégorématiques vs termes syncatégorématiques

## Exercice 1

Parmi les énoncés suivants, quels sont ceux qui correspondent à une proposition atomique ?

1. Mon ami est venu me voir cet après-midi.
2. Mon ami est venu me voir cet après-midi pour me demander de l'argent.
3. Mon ami est venu me voir cet après-midi et il m'a demandé de l'argent.
4. Mon ami est venu me voir cet après-midi parce qu'il voudrait que je lui prête de l'argent.
5. Mon ami ne vient me voir que quand il a besoin d'argent.
6. Mon ami voudrait que je lui prête de l'argent.

## Exercice 2 : condition nécessaire et suffisante

Repérer la forme des raisonnements suivants. Quels sont les symboles logiques et les symboles non logiques ?

- 1) Jean prend part au jeu seulement quand il est persuadé qu'il va gagner. Aujourd'hui, il prend part au jeu. Par conséquent, il est persuadé qu'il va gagner.
- 2) Pour que Jean vienne, il faut l'inviter. Or on ne l'a pas invité. C'est pourquoi il n'est pas là.

## II) LE CALCUL DES PROPOSITIONS

### A) Syntaxe

#### Définition par induction

- (i) Si  $p$  est une lettre de proposition,  $p$  est une formule du langage.
- (ii) Si  $\varphi$  est une formule du langage, alors  $\neg\varphi$  aussi.
- (iii) Si  $\varphi$  et  $\phi$  sont deux formules du langage, alors  $(\varphi \wedge \phi)$ ,  $(\varphi \vee \phi)$ ,  $(\varphi \rightarrow \phi)$  et  $(\varphi \leftrightarrow \phi)$  aussi.
- (iv) Seules les formules générées par les clauses (i)-(iii) sont des formules du langage.

Effacement des parenthèses aux extrémités d'une formule complexe.

#### Exercice 3

Parmi les formules suivantes, lesquelles sont bien formées, lesquelles sont mal formées ?  
 $p$ ,  $(p \leftrightarrow q)$ ,  $\rightarrow q$ ,  $\neg p$ ,  $p \wedge q$ ,  $(p \vee q) \vee r$ ,  $\neg \vee p q$ ,  $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge q)$ ,  $p \rightarrow p \vee r$

### B) Sémantique et table de vérité

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Il existe des opérateurs vériconditionnels ou vérifonctionnels, et d'autres qui ne le sont pas :  
*il est faux que*  
*il est admis que, parce que*

#### Exercice 4

Comparer les discours suivants. Est-ce qu'ils disent la même chose ? Justifier votre réponse en vous appuyant sur leur forme propositionnelle.

1. Si Marie vient à la fête, je ne viens pas.
2. Marie vient à la fête, donc je ne viens pas.

#### Exercice 5

- (1) a. C'est Marie qui prépare le dessert.
- b. C'est le dessert que Marie prépare.

## III) AVANTAGES DU CALCUL PROPOSITIONNEL

### • Le calcul des conditions de vérité

Une tautologie est une formule toujours vraie

Les contradictions sont les formules toujours fausses.

### • Tautologie et contradiction

#### Définition :

Une tautologie est une formule toujours vraie.

Une contradiction est une formule toujours fausse.

Une formule qui n'est ni toujours vraie, ni toujours fausse est contingente ou satisfaisable.

### Exercice 6

Donner un exemple de tautologie, de contradiction, et de formule satisfaisable.

Les phrases suivantes correspondent-elles à des tautologies propositionnelles ?

- a) *Ou il pleut, ou il ne pleut pas.*
- b) *Tout homme est un homme.*
- c) *Un célibataire n'est pas marié.*
- d) *La guerre, c'est la guerre.*
- e) *Il est gentil, et pas gentil.*

#### • Quelques lois logiques :

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$$

lois de Morgan

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$$

loi de Morgan

$$\neg\neg p \Leftrightarrow p$$

$$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$$

#### Conclusion :

langue

formalisation propositionnelle

valeur de vérité dans un modèle

### Exercice 7

Proposez une transcription en logique propositionnelle des phrases suivantes en mettant en évidence les connecteurs. Précisez à chaque fois ce que vous faites correspondre à chaque lettre de proposition.

- (i) *Le véhicule n'est pas bruyant, mais il consomme beaucoup d'essence*
- (ii) *Ce n'est pas vrai que Caïn est coupable et Abel non coupable*
- (iii) *Jean n'est pas seulement stupide, mais il est aussi ridicule*
- (iv) *Jean veut à la fois une bicyclette et un train électrique, mais il n'aura ni l'un ni l'autre*
- (v) *Personne ne rit ni n'applaudit*
- (vi) *Je vais à la plage ou au cinéma, à vélo ou à pied*
- (vii) *Charles et Elsa sont frère et soeur ou cousin et cousine*
- (viii) *Charles va à son travail en voiture, ou à bicyclette et en train*
- (ix) *S'il pleut pendant que le soleil brille, il y a un arc-en-ciel*
- (x) *En cas de mauvais temps, ou si trop de participants sont malades, la soirée sera annulée*
- (xi) *Jean va à l'école, et s'il pleut, Pierre aussi*
- (xii) *Quand on n'est plus en été, alors il fait froid et humide, si c'est le soir ou la nuit*
- (xiii) *Si tu ne m'aides pas quand j'en ai besoin, alors je ne t'aiderai pas quand tu auras besoin de moi*
- (xiv) *Charles viendra avec Marie*
- (xv) *Jean vient seulement si Pierre ne vient pas*
- (xvi) *Jean vient juste si Pierre ne vient pas*
- (xvii) *Nous partirons, à moins qu'il pleuve*

### Exercice 8

Formaliser les énoncés suivants ainsi que leur négation:

- (a) *Othello et Desdémone sont mariés.*

- (b) *Othello et Iago sont mariés mais pas Cassio.*
- (c) *Desdémone aime Othello mais pas Cassio.*
- (d) *Othello est jaloux et naïf.*
- (e) *La robe de Desdémone est blanche et bleue.*

**Exercice 9**

Donner l'arbre de décomposition des formules suivantes :

- (i)  $((P \vee Q) \vee R) \leftrightarrow (P \vee (Q \vee \neg R))$
- (ii)  $(\neg(P \vee Q) \vee R) \rightarrow \neg(P \vee (Q \vee R))$

**Exercice 10**

Donner la plus simple traduction possible en langue naturelle de la formule suivante, sachant que p signifie "Jean doit démissionner" et q "Marie a menti".

- (1)  $\neg q \rightarrow p$
- (2)  $p \rightarrow \neg q$